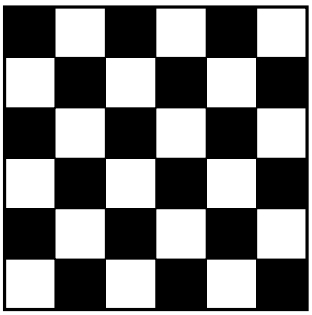
Parité, pavages et sommes

What cannot be, what must be

Échiquier 6×6



Carré magique de Khajuraho

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Préliminaires

Exercice 1 Une feuille de papier est déchirée en trois parties. Ensuite, à chaque étape on peut choisir l'une des parties, et la déchirer de nouveau en trois parties. Peut-on obtenir, en fin de compte, un total de cent parties ?

Exercice 2 Une calculatrice affiche initialement le nombre 1. À chaque étape, on peut soit doubler le nombre affiché, soit le doubler puis ajouter 1. Peut-on obtenir 2026 ?

Exercice 3 Un entier est dit *basique* s'il peut s'écrire comme une somme de puissances de 2 distinctes. Par exemple $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$ est basique.
Un entier est dit *formidable* s'il peut s'écrire comme une somme de puissances distinctes de 4, et *réussi* s'il peut s'écrire comme une somme de puissances distinctes de 6.

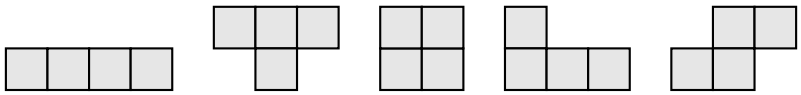
1. Les entiers 66 et 150 sont-ils basiques ?
2. Peut-on écrire 2026 comme la somme d'un entier formidable et d'un entier réussi ?
   Démontrer la réponse.

Exercice 4 Alice et Bob jouent à tour de rôle et Alice commence. Au départ, 20 biscuits se trouvent sur une assiette rouge et 14 sur une assiette bleue. Un coup consiste soit à manger deux biscuits pris sur une même assiette, soit à déplacer un biscuit de l'assiette rouge vers l'assiette bleue ; on ne peut jamais déplacer de biscuit dans l'autre sens. Le dernier joueur pouvant effectuer un coup gagne. Quel joueur peut garantir sa victoire, quelle que soit la stratégie de l'autre ? Démontrer la réponse.

Pavages et coloriages

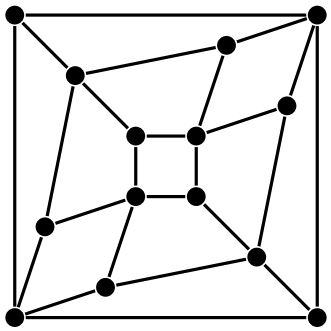
Exercice 5 On considère un échiquier 6×6 auquel on retire deux cases, dans deux coins opposés. Est-il possible de paver le reste des cases des dominos de deux cases, en positions horizontales ou verticales ?

Exercice 6 Est-il possible de former un rectangle avec les 5 tétrominos suivants ?



Exercice 7 Est-il possible de paver un échiquier 8×8 par des tetrominos en T ? Et un échiquier 10×10 ?

Exercice 8 ★ Dans le dessin suivant, existe-t-il un chemin suivant les arêtes qui passe par chaque ville une et une seule fois ?

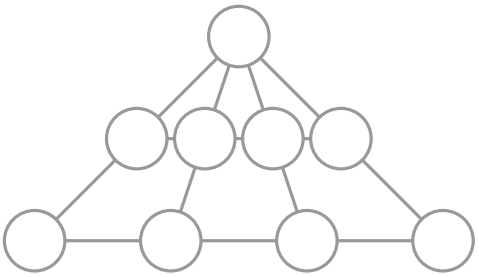


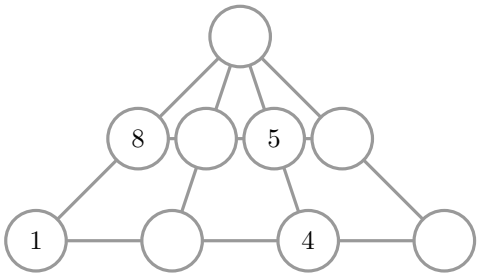
Structures magiques

Exercice 9 Jeanne veut écrire des nombres dans les cases d'un tableau 3×3 de telle sorte que les sommes des nombres de chacun des quatre carrés 2×2 contenus dans le tableau soient égales. On a déjà écrit des nombres dans trois des coins. Quel nombre Jeanne doit-elle écrire dans le quatrième coin ?

2		4
?		3

Exercice 10 Chaque bulle du réseau ci-dessous doit contenir un chiffre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Tous les chiffres doivent être utilisés, et les sommes obtenues en suivant les lignes horizontales (à quatre chiffres) ou obliques (à trois chiffres) doivent toutes les six être identiques.





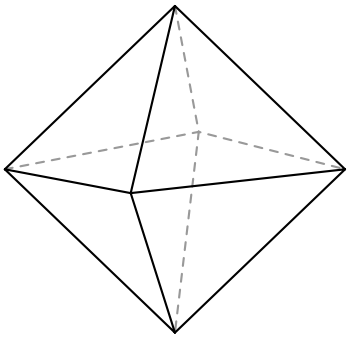
1. Compléter le réseau de droite.
2. Montrer que dans tous les remplissages admissibles, la bulle supérieure contient le même chiffre.
3. Combien y a-t-il de remplissages admissibles ?

Exercice 11 Jean souhaite placer les entiers positifs 1, 2, 3, …, 9 dans les cases d'une grille 3×3 de telle sorte que :

- chaque case contient exactement un nombre ;
- le produit des nombres de chaque ligne est un multiple de quatre ;
- le produit des nombres de chaque colonne est un multiple de quatre.

La tâche de Jean est-elle possible ? Justifiez votre réponse.

Exercice 12 Un octaèdre régulier est un solide qu'on peut considérer comme l'assemblage de deux pyramides régulières à base carrée dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. Il a donc 8 faces triangulaires et 6 sommets. C'est un des cinq polyèdres réguliers.

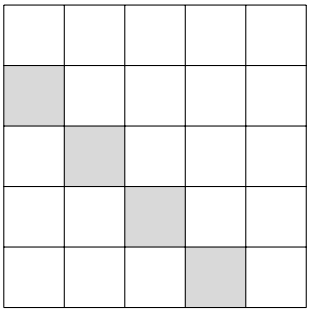


Sur chacune des faces d'un tel octaèdre, on écrit un des entiers compris entre 1 et 8. Chacun de ces entiers est utilisé une et une seule fois. Chaque sommet appartient à quatre faces, et pour chaque sommet on fait la somme des nombres inscrits sur ces quatre faces.

1. Est-il possible que quatre sommets situés dans un même plan (les sommets d'un carré, donc) reçoivent le même total de points ?
2. Si trois sommets d'un carré reçoivent le même total, quel total reçoit le quatrième ?
3. On observe cinq totaux identiques. Quels sont-ils ? Quel est le sixième total ?
4. On observe quatre totaux identiques et pas cinq. Un des deux autres totaux est 16. Quel est le dernier ?

Autres exercices

Exercice 13 Dans chaque case d'un tableau carré à 5 lignes et 5 colonnes, on inscrit un nombre, 1, 2, 3, 4 ou 5, de sorte que chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales du tableau fasse apparaître une et une seule fois chacun des nombres 1, 2, 3, 4 ou 5.



1. Représenter un tel tableau.

La somme des nombres figurant dans les quatre cases de la sous-diagonale (dont les cases sont grisées) est appelée *score* du carré.

2. Le *score* d'un tel carré peut-il être 20 ?
3. Quel est le *score* maximum pour ces carrés ?

Exercice 14 Des garçons et des filles sont alignés en rang, dans un certain ordre, pour une photo. Tous font face au photographe. Chaque fille compte le nombre de garçons à sa gauche, et chaque garçon compte le nombre de filles à sa droite. Soit G la somme des nombres comptés par les filles et B la somme des nombres comptés par les garçons. Démontrer que $G = B$.

Exercice 15 Un calculateur étrange possède un écran numérique et seulement deux boutons, $\mathrm{D}_{\#}^{\#}$ et $\mathrm{D}'_{\#}$.

- Le bouton $\mathrm{D}_{\#}^{\#}$ double le nombre affiché puis ajoute 1.
- Le bouton $\mathrm{D}'_{\#}$ double le nombre affiché puis soustrait 1.

Par exemple, si l'écran affiche 5, l'appui successif sur $\mathrm{D}_{\#}^{\#}\mathrm{D}'_{\#}\mathrm{D}'_{\#}\mathrm{D}'_{\#}$ donne 87.

1. Supposons que le nombre initial affiché soit 1. Donner une séquence de exactement huit appuis de boutons qui donne 313.
2. Supposons que le nombre initial affiché soit 1, et que l'on effectue exactement huit appuis de boutons. Quels sont tous les nombres qui peuvent être obtenus ? Démontrer la réponse en montrant que tous ces nombres peuvent être produits, et qu'aucun autre nombre ne peut être produit.